

## Типові математичні моделі, які застосовуються в автоматизованих системах організаційного управління

Вікторія Ключова<sup>1</sup>, Владислав Герасимчук<sup>2</sup>, Ігор Данилов<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Київський національний університет будівництва і архітектури  
пр-т Повітряних Сил, 31, м.Київ, Україна, 03037

<sup>2,3</sup>Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій  
вул. Солом'янська, 7, м.Київ, Україна, 03037

<sup>1</sup>kliuieva.vv@knuba.edu.ua, <https://orcid.org/0000-0003-1267-0717>,

<sup>2</sup>h3rasymchuk@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0003-8944-1952>,

<sup>3</sup>danylovihor@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0000-1426-6414>

Received 03.09.2024, accepted 29.10.2024

<https://doi.org/10.32347/uwt.2024.15.1101>

**Анотація.** У статті розглядаються типові математичні моделі, які використовуються в автоматизованих системах управління (АСУ), різновидом яких є автоматизовані системи організаційного управління (АСОУ), з метою прийняття оптимальних управлінських рішень.

У наш час неможливо вирішувати проблеми управління економікою шляхом механічного збільшення чисельності управляючого апарату, тому що масштаби робіт вимагають такої кількості людей, яка не може бути направлена до сфери управління.

Проводиться аналіз найбільш розповсюджених типів задач, які розв'язуються керівниками на всіх ланках управління: управління запасами, розподілу, масового обслуговування, впорядкування, заміни.

Наводиться приклад розв'язування задач управління запасами на складському господарстві.

Дається загальна характеристика математичних моделей, що використовуються у детермінованих задачах прийняття організаційно-економічних рішень в організаційних системах та наводяться умови для їх застосування.

**Ключові слова:** математичні моделі, автоматизовані системи організаційного управління, прийняття управлінських рішень, дослідження операцій.

### ВСТУП

Визначені обставини привели до широкого застосування автоматизованих систем управління (АСУ), різновидом яких є автоматизовані системи організаційного управління (АСОУ) – ерготичні (людино-



**Вікторія Ключова**  
старший викладач кафедри  
кібербезпеки та  
комп'ютерної інженерії



**Герасимчук Владислав**  
аспірант кафедри  
телекомунікаційних систем  
ДУІКТ



**Ігор Данилов**  
аспірант кафедри  
технічних систем  
кіберзахисту ДУІКТ

машинні) системи, засновані на використанні економіко-математичних методів та засобів електронно-обчислювальної техніки для збору, зберігання та обробки інформації про об'єкт управління з метою вироблення оптимальних управлінських рішень.

Однією з теорій, яка дає можливість застосовувати математичні методи при прийнятті управлінських рішень, є дослідження операцій. Методи дослідження операцій можна однаково застосовувати у будь-яких галузях. Різні за конкретним проявом господарські процеси можна описувати одними й

тими ж моделями, наприклад, системою лінійних алгебраїчних рівнянь.

### ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ

Розглянемо найбільш розповсюджені типи задач, які розв'язуються в автоматизованих системах організаційного управління. Ці задачі отримали такі умовні назви:

- задачі управління запасами;
- задачі розподілу;
- задачі масового обслуговування;
- задачі впорядкування;
- задачі вибору маршруту;
- задачі заміни;
- змагальні задачі.

#### Задачі управління запасами

Запаси – це ресурси, які в даний момент часу не використовуються. Основні види ресурсів, з якими доводиться мати справу господарським керівникам, – це матеріали, машини, грошові кошти, а також людські ресурси. Задача управління запасами виникає у тих випадках, коли наявність невикористовуваних ресурсів призводить до витрат, характер яких не є однорідним: одні зростають із збільшенням запасів, інші зменшуються (убувають).

У таких ситуаціях ставиться питання про визначення оптимальної величини запасу на складі з точки зору мінімізації критерію «сумарні витрати».

Приклади витрат, що зростають із збільшенням запасу: складські витрати; втрати, пов'язані зі старінням та псуванням; втрати від збільшення обсягу облікових операцій тощо.

Витрати, що зменшуються із збільшенням запасів, пов'язані з відсутністю запасів та несвоечасною поставкою; із зменшенням обсягу підготовчо-заклучних операцій; з ефектом оптових закупок; з ефектом більш раціональної спеціалізації працівників постачальницько-збутових та виробничих підрозділів тощо.

Розмір даних витрат залежить від багатьох факторів і, в першу чергу, від

розмірів партії та тривалості інтервалу між поставками. Отже, необхідно оптимальним чином визначити ці параметри.

Розглянемо ситуацію, що виникає в одному із складських господарств. Нехай попит на продукт  $P$  є постійним і дорівнює  $h$  тонн на добу. Нестача продукту неприпустима. Поповнення складу відбувається партіями по  $n$  тонн. Затрати на доставку однієї партії на склад не залежать від розміру партії, постійні і дорівнюють  $C_0$  гривень. Вартість зберігання 1 тонни за добу дорівнює  $C_t$ . Загальний попит за інтервал часу  $T$  дорівнює  $N$  тонн.

Однак не обов'язково завозити на склад одразу усі  $N$  тонн продукту. Можливо, що це вигідніше робити у декілька прийомів, поповнюючи склад через інтервали часу  $\tau$  партіями по  $n$  тонн. Всього партій буде  $m$ .

Очевидно:

$$\begin{aligned} N &= mn, \\ T &= m\tau, \\ n &= h\tau. \end{aligned} \quad (1)$$

Це умови зв'язку. Величини  $N$ ,  $T$ ,  $C_0$  та  $C_t$  – задані. Необхідно визначити економічні розміри партії  $n$ , число партій  $m$  та їх періодичність  $\tau$ , так щоб сумарні витрати на зберігання та доставку виявились найменшими.

Витрати на зберігання однієї партії продукту виражаються величиною  $(1/2)nC_t\tau$ , тому сумарні витрати по доставці та зберіганню однієї партії дорівнюють  $C_0 + (1/2)nC_t\tau$ . Таким чином, сумарні витрати  $C$  по доставці та зберіганню продукту на складі за весь період будуть дорівнювати

$$C = mC_0 + (m/2)C_t n\tau. \quad (2)$$

Рівняння (2) та умови зв'язку (1) являють собою математичну модель задачі. Це система лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими  $n$ ,  $m$ ,  $\tau$ .

Розв'яжемо цю систему. Використовуючи умови зв'язку (1), замінимо у (2)  $m$  і  $\tau$  через  $h$ . Тоді

$$C = NC_0/n + C_i Tn/2. \quad (3)$$

Щоб знайти мінімум  $C$ , необхідно визначити, при якому  $n_0$  похідна  $\frac{dC}{dn} = 0$ .

З (3) маємо:

$$\frac{dC}{dn} = -NC_0/n^2 + C_i T/2 = 0. \quad (4)$$

Очевидно, що  $\frac{dC}{dn} = 0$  при  $n_0 = \sqrt{2NC_0/C_i T}$ . (5)

Таким чином визначається оптимальний розмір партії продукту, а потім з умов зв'язку (1) і оптимальні розміри циклу поставок  $\tau_0$  та числа партій  $m_0$ :

$$\tau_0 = n_0/h, \quad (6)$$

$$m_0 = N/n_0. \quad (7)$$

Ми розглянули найпростішу модель управління запасами, так звану модель з фіксованим розміром замовлення. Ця модель може бути ускладнена за рахунок зняття такої умови, як неприпустимість відсутності продукту на складі. У цьому випадку треба врахувати збитки від тимчасового незадовільнення попиту та увести їх в модель.

Таким чином, первісна найпростіша модель допускає нарощування та ускладнення, в процесі якого може знадобитися і використання нових математичних засобів для її розв'язання.

### Задачі розподілу

Типовими умовами, в яких розв'язується задача розподілу, є такі:

- існує ряд операцій (будь-якого виду), які повинні бути виконані;
- мається достатня кількість ресурсів для виконання цих операцій;
- принаймні, деякі операції можна виконувати різними способами, використовуючи різну кількість та різні комбінації ресурсів;

- деякі способи виконання операцій кращі за інші (менш дорогі, дають більший ефект);
- наявна кількість ресурсів недостатня для виконання кожної операції оптимальним способом.

Задача полягає у виборі такого розподілу ресурсів за операціями, при якому досягається максимальна загальна ефективність системи. Наприклад, можуть мінімізуватися сумарні затрати або може максимізуватися сумарний прибуток.

Найпростіший варіант такої задачі, коли для виконання одної операції потрібен один вид ресурсу, а число операцій та ресурсів співпадає, отримав назву *задачі про призначення*.

Більш загальний випадок, коли для виконання одної операції потрібно декілька видів ресурсів і один ресурс може брати участь у різних операціях, отримав назву *транспортної задачі*.

Математичний апарат, який використовується для побудови такого роду моделей розв'язування відповідних оптимізаційних задач, – методи *математичного програмування*. Різні види програмування – лінійне, нелінійне, стохастичне, параметричне та динамічне – відрізняються видом використовуваної інформації та прийнятими припущеннями.

### Задачі масового обслуговування

Важливість задачі швидкого обслуговування черги покупців, відвідувачів тощо зрозуміла кожному. Специфіка ситуації, що при цьому складається, призводить до побудови моделей, які називаються *моделями обслуговування*. В термінах моделі обслуговування – особи чи об'єкти, незалежно від їхньої природи, які стоять у черзі, називаються заявками або клієнтами; мета їх очікування – операція обслуговування; місце, де виконуються операції – засіб обслуговування.

Для системи «клієнти – засіб обслуговування» характерно, що майже завжди мають місце або клієнти, що простоюють, або засоби обслуговування та (або) обслуговуючий персонал, що простоюють. І те, і інше призводить до

виникнення витрат, тому задача зводиться до мінімізації їх сумарної величини.

Порядок розвантаження суден в порту, роботи персоналу довідкових телефонних служб, структура та обсяг операцій, що надаються установами сервісу, – типові приклади задач масового обслуговування. Математичний апарат теорії масового обслуговування – апарат теорії ймовірностей, а також теорії диференціальних та інтегральних рівнянь.

### *Задачі впорядкування*

В задачах масового обслуговування клієнтів порядок обслуговування заявок або заданий заздалегідь, або утворюється стихійно. Розв'язування задач впорядкування передбачає визначення такого порядку обслуговування заявок, за якого мінімізується загальна тривалість обслуговування або деяка функція, залежна від витрат в обслуговуванні.

Математичний апарат задач впорядкування розвинений ще недостатньо. Лише задачі обмеженої розмірності можуть розв'язуватись точними аналітичними моделями. У більш складних випадках необхідно вдаватися до моделювання на ЕОМ. Задачі такого типу виникають при плануванні проведення ремонтних робіт, переоснащення верстатного парку, робіт по освоєнню нової продукції тощо.

Для постановки та розв'язування задач впорядкування необхідна інформація про необхідну послідовність виконання операцій обслуговування, тривалість операції і затрати ресурсів на її виконання.

### *Задачі заміни*

Стандартні ситуації, в яких виникають задачі заміни, пов'язані з погіршенням характеристик елементів системи у процесі їх експлуатації або виходом з ладу, тобто відмовою.

Так, наприклад, складська або транспортна тара багатократного використання постійно зношується, втрачає свої властивості. Часто ремонтувати (заміняти) тару – означає збільшувати

витрати за статтею ремонту. Скорочення витрат по ремонту тари може призвести до збільшення витрат на псування продуктів (в результаті погіршення умов зберігання). Отже, необхідно визначати оптимальний період ремонту (оновлення) тарного господарства, для того щоб забезпечити мінімум сумарних витрат та втрат.

Описані на якісному рівні математичні моделі задач прийняття організаційно-економічних рішень можна застосовувати при виконанні таких умов (умови Д. Шлессинжера):

- критерій (ціль) може бути точно визначений;
- може бути побудована формальна модель, яка виражає зв'язки між критерієм, змінними та існуючими обмеженнями;
- є достатня кількісна інформація, що дозволяє здійснити розумне визначення параметрів;
- значення вибраного критерію однозначно виражають корисність окремої альтернативи, визначеної фіксованими значеннями змінних.

На практиці найбільш вірогідне виконання цих умов на нижньому та середньому рівнях управління для технічних та повторюваних функцій у стандартних ситуаціях, тобто при прийнятті в основному оперативних, тактичних, а не стратегічних та унікальних рішень.

В найбільш загальному вигляді математичні моделі, що використовуються у детермінованих задачах вибору рішень, можуть бути представлені як

$$z \in G_z \subset Z, \quad (8)$$

де  $Z$  – простір змінних,  $z$  – змінні моделі,  $G_z$  – множина допустимих значень змінних.

Для вибору найбільш раціонального рішення повинна бути визначена система показників (критеріїв), що характеризують якість кожного з можливих рішень, тобто

$$f_i(z), i=1, \dots, r. \quad (9)$$

Значення показників при різних допустимих значеннях змінних слугують основою для вибору рішення. Найбільше

розповсюдження у прикладних дослідженнях отримав оптимізаційний підхід, заснований на формулюванні єдиного показника, величина якого є критерієм вибору найкращого рішення з множини можливих. Формалізована постановка даної задачі має такий вигляд:

$$f(z) \rightarrow \max \text{ при } z \in G_z. \quad (10)$$

За наявності деяких показників (критеріїв) у деяких випадках вдається шляхом використання згортки побудувати на їх основі єдиний. Під *згорткою показників* розуміють побудову функції  $U(z)=F(f_1(z), \dots, f_m(z))$ , яка може бути використана як критерій замість системи показників (9). Один з методів згортки («економічний») полягає у заданні додатних величин  $\lambda_i$  ( $i=1, \dots, r$ ), на основі яких критерій формулюється у вигляді:

$$U(z) = \sum_{i=1}^r \lambda_i f_i(z). \quad (11)$$

Величини  $\lambda_i$  мають зміст цінності одиниці кожного з показників, оцінюючи його вклад у збільшення критерію задачі.

Тоді для моделі (8) можна поставити таку задачу вибору найкращого рішення: знайти  $z^* \in Z$ , на якому досягається.

$$\max_{z \in G_z \subset Z} U(z)$$

Таку задачу вибору рішень називають задачею оптимізації, а те допустиме значення  $z^*$ , при якому досягається розв'язок задачі оптимізації, - оптимальним. Пошук оптимального значення  $z^*$  здійснюється з використанням методів математичного програмування.

Проблеми вибору рішень з використанням точних математичних моделей відносяться до класу кількісно структурованих проблем, в яких залежності можуть бути виражені у чисельних оцінках.

Разом з цим в організаційних системах існує велика кількість неструктурованих або якісно виражених проблем прийняття рішень, в яких кількісні залежності

невідомі. Існують слабко структуровані або змішані проблеми.

Важлива особливість подібних проблем полягає у тому, що їх модель або правило відбору альтернативних рішень можуть бути побудовані тільки на основі додаткової суб'єктивної інформації, отриманої від людини, яка бере участь у вирішенні проблеми.

Сучасні методи теорії прийняття рішень приписують певні норми поведінки ОПР. В основу цієї теорії покладена концепція, яка пов'язує такі поняття, як суб'єктивна ймовірність та корисність результатів, а також гіпотеза, у відповідності до якої ОПР повинна завжди вибирати альтернативу з максимальною очікуваною корисністю.

До таких методів насамперед відноситься широко розповсюджена на практиці група методів багатокритеріальної оцінки альтернатив.

При використанні методів даного типу виникають дві основні проблеми: як отримати оцінки кожної з альтернатив за окремими критеріями та як об'єднати, агрегувати ці оцінки у загальну оцінку корисності альтернативи.

## ВИСНОВКИ

Застосування математичних моделей дослідження операцій має важливе значення для прийняття управлінських рішень керівниками на всіх ланках управління.

Кількісна оцінка параметрів технологічних процесів необхідна для зменшення невизначеності та стохастичності.

Математичні моделі дозволяють оптимізувати рівень витрат ресурсів при виконанні будь-яких процесів (підготовчих, постачальницько-збутових, логістичних, виробничих тощо).

Динамічні, стохастичні процеси можуть відтворюватись за допомогою інструментів математичного програмування, що сприяє більш точному плануванню, прогнозуванню та моніторингу процесів.

## REFERENCES

1. **Savenko V. I., Shatrovoi I. A., Fialko N. M., Honcharenko T. A.** (2022). Doslidzhennia i matematychni modeliuvannia orhanizatsiinykh struktur ta intelektualni informatsiini instrumenty v orhanizatsii i upravlinni budivnytstvom: monohrafiia. 2-he vyd. vypr. ta dop. Kyiv, Tsentru uchbovoi literatury Publ., 148.
2. **Dotsenko S. I., Savenko V. I., Bazylenko S. O., Kliuieva V. V., Palchyk S. P., Hihineishvili D. Ya.** (2018). Intelektualni informatsiini tekhnologii u pryiniatti efektyvnykh rishen v upravlinni pidpriem-stvom. *Upravlinnia rozvytkom skladnykh system*, 34, 161–169.
3. **Savenko V. I., Dotsenko S. I., Kliuieva V. V., Palchyk S. P., Tereshchuk M. O.** (2019). Intelektualni informatsiini instrumenty rozvytku vyrobnychykh system, enerhetychnoho menedzhmentu ta pidpriemstva v tsilomu. *Upravlinnia rozvytkom skladnykh system*, 37, 195–204.
4. **Pavlenko P. M., Filonenko S. F., Cherednikov O. M., Treitiak V. V.** (2017). Matematychni modeliuvannia system i protsesiv: navch. posib. Kyiv, NAU Publ., 392.
5. **Hevko I. B.** (2009). Metody pryiniattia upravlinskykh rishen: book. Kyiv, Kondor, 187.
6. **Izmailova O. V.** (2002). Metody pryiniattia bahatokryteriinykh rishen v informatsiinykh systemakh: book. Kyiv, 111.
7. **Savenko V. I., Nesterenko I. S., Kliuieva V. V.** (2019). Upravlinnia konkurentospromozh-nistiu pidpriemstva v suchasnykh umovakh hospodariuvannia. *Shliakhy pidvyshchennia efektyvnosti budivnytstva v umovakh formuvannia rynkovykh vidnosyn*, 42, 66–76.
8. **Klebanova T. S., Kyzym M. O., Cherniak O. I.** (2009). Matematychni metody i modeli rynkovoï ekonomiky: book. Kharkiv, «Inzhnek» Publ., 456.

**Typical mathematical models used in computer-aided organizational management systems**

*Viktoriia Kliuieva, Vlad Herasymchuk, Ihor Danylov*

**Abstract.** The article considers typical mathematical models used in automated control systems (ACS), a type of which are automated organizational control systems (ACOC), with the aim of making optimal management decisions.

In our time, it is impossible to solve the problems of managing the economy by mechanically increasing the number of the governing apparatus, because the scale of the work requires such a number of people that cannot be directed to the sphere of management.

An analysis of the most common types of tasks solved by managers at all levels of management is carried out: inventory management, distribution, mass service, ordering, replacement.

An example of solving the problem of inventory management at a warehouse is given.

A general description of mathematical models used in deterministic tasks of organizational and economic decision-making in organizational systems is given and the conditions for their application are given.

**Keywords:** mathematical models, automated organizational management systems, management decision-making, operations research.